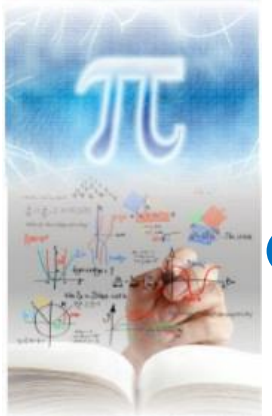
PITAGORAS
ACADEMIA

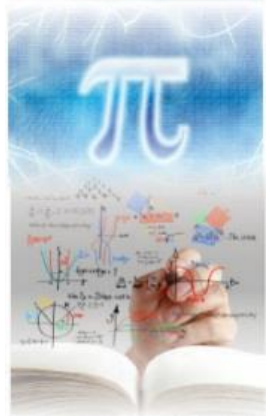
ÁLGEBRA

Profesor
Freddy Avalos C



SUCESIONES REALES

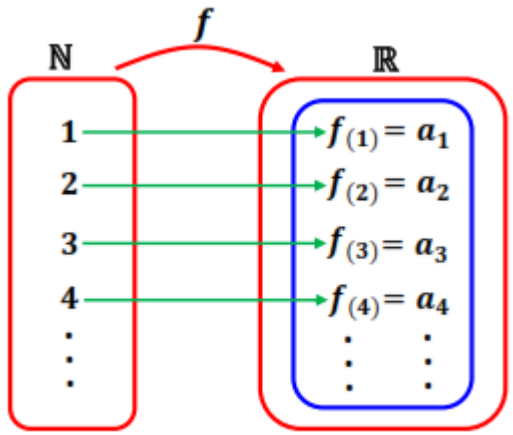
SERIES NUMERICAS



SUCESIONES REALES

Sucesiones reales

Una **sucesión es una función** cuyo **dominio** es el conjunto de los **números naturales** y su **rango** es un **subconjunto de los números reales**, es decir:



Donde

$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ \ldots$: Términos de la sucesión.

Notación

Una sucesión se puede denotar de la forma:

$$(a_n) = (a_n)_{n\geq 1} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1; a_2; a_3; a_4; ..)$$

Ejemplos

1. $\left(\frac{1}{n}\right) = \left\{\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\right\}$

sucesión armónica

2. $(n^2) = \{1^2; 2^2; 3^2; 4^2; \ldots\}$

3. $(\text{Sen}n)_{n\geq 1} = \{\text{Sen1}; \text{Sen2}; \text{Sen3}; \text{Sen4}; \ldots\}$

4. $\left((-1)^n.n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \{-1;\ 2; -3;\ 4; \ldots\}$

SUCESIONES REALES

Término n –ésimo

Llamado también término general o ley de formación. Es la expresión que nos indica cómo se relacionan los elementos del dominio con su rango, denotado por lo general como a_n.

Ejemplos

1. $(a_n) = \{2; 4; 6; 8; \ldots\} \Rightarrow a_n = 2n$

2. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{1; 2; 6; 24; \ldots\} \Rightarrow b_n = n!$

3. $(x_n) = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots\right\} \Rightarrow x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4. $(y_n)_{n\geq 1} = \{1; 4; 27; 256; \ldots\} \Rightarrow y_n = n^n$

Aplicación

Determine el vigésimo término de la siguiente sucesión.

$$\left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{4}{7}; \frac{5}{9}; \ldots\right\}$$

Resolución

Hallaremos el término general. Sea la sucesión (a_n) donde:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{3} = \frac{1+1}{2.1+1} \\ a_2 &= \frac{3}{5} = \frac{2+1}{2.2+1} \\ a_3 &= \frac{4}{7} = \frac{3+1}{2.3+1} \\ a_4 &= \frac{5}{9} = \frac{4+1}{2.4+1} \end{aligned}\right\} \; a_n = \frac{n+1}{2n+1}$$

Entonces el vigésimo término será:

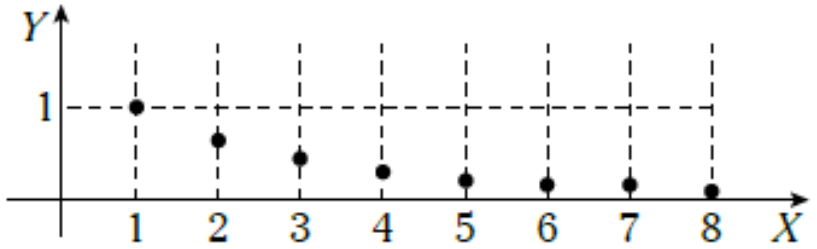
$$a_{20} = \frac{20+1}{2.20+1} = \frac{21}{41}$$

GRÁFICA DE UNA SUCESIÓN

Como la sucesión es una función, podemos graficarla en el plano cartesiano.

Ejemplo

Sea la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right) = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\right\}$ cuya gráfica es



PITAGORAS ACADEMIA

SUCESIONES REALES

Clases de sucesiones

I. Sucesión acotada

Una sucesión es acotada si todos sus términos están entre dos números reales, es decir:

(a_n) es acotada $\leftrightarrow\ p < a_n < q;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, tal que p y $q \in \mathbb{R}$

Ejemplos

1. $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\right\}$ ¿Es acotada?

Si, porque $0 < \frac{1}{n} < 2;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

2. $(\mathrm{Sen}n)_{n\geq 1} = \{\mathrm{Sen}1; \mathrm{Sen}2; \mathrm{Sen}3; \mathrm{Sen}4; \ldots\}$ ¿Es acotada?

Si, porque $-1 \leq \mathrm{Sen}n \leq 1;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

3. $(6)_{n\geq 1} = \{6; 6; 6; 6; \ldots\}$ ¿Es acotada?

Si, porque $5 < a_n < 7;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

4. $(n^2) = \{1^2; 2^2; 3^2; 4^2; \ldots\}$ ¿Es acotada?

No, porque $0 < n^2; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Pero, es **acotada inferiormente.**

5. $(-2^n)_{n\in\mathbb{N}} = \{-2; -4; -8; -16; \ldots\}$ ¿Es acotada?

No, porque $-2^n < -1; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Pero, es **acotada superiormente.**

6. $\left((-1)^n . n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \{-1;\ 2; -3;\ 4; \ldots\}$ ¿Es acotada?

No es acotada, ni siquiera es acotada superiormente e inferiormente (es no monótona).

SUCESIONES REALES

Aplicación

Indique si las siguientes sucesiones son acotadas.

$$(a_n) = \left(\frac{2}{\sqrt{n}+1}\right) \qquad (b_n) = \left(\frac{n-2}{n+1}\right)$$

Resolución

1) Como: $n \in \mathbb{N}$ entonces $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \sqrt{n} &\geq 1 \\ \sqrt{n}+1 &\geq 2 \\ 0 < \frac{1}{\sqrt{n}+1} &\leq \frac{1}{2} \\ 0 < \frac{2}{\sqrt{n}+1} &\leq 1 \end{aligned}$$

$\sqrt{\ }$; $+1$; *Invertir* ; $\times 2$

$\frac{2}{\sqrt{n}+1} = a_n$

$\therefore a_n$ es acotada

2) Trasformaremos el término enésimo

$$b_n = \frac{n-2}{n+1} \Rightarrow b_n = \frac{n-2}{n+1} - 1 + 1$$

$$b_n = \frac{-3}{n+1} + 1$$

Como: $n \in \mathbb{N}$ entonces $n \geq 1$

$$\begin{aligned} n+1 &\geq 2 \\ 0 < \frac{1}{n+1} &\leq \frac{1}{2} \\ 0 > \frac{-3}{n+1} &\geq -\frac{3}{2} \\ 1 > \frac{-3}{n+1} + 1 &\geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$+1$; *Invertir* ; $\times(-3)$; $+1$

$\frac{-3}{n+1} + 1 = b_n$

$\therefore b_n$ es acotada

SUCESIONES REALES

II. Sucesión monótona

Una sucesión (a_n) es monótona si es uno de los siguientes tipos:

Sucesión	Definición	Ejemplo
Creciente	$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots$ o $a_n < a_{n+1}\ ;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$	$(n^2) = \{1^2; 2^2; 3^2; 4^2; \ldots\}$ Es creciente porque, $1^2 < 2^2 < 3^2 < 4^2 < \ldots$
Decreciente	$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots$ o $a_n > a_{n+1}\ ;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$	$\{-3n\} = \{-3; -6; -9; -12; \ldots\}$ Es decreciente porque, $-3 > -6 > -9 > -12 > \ldots$
NO creciente	$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots$ o $a_n \geq a_{n+1}\ ;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$	$\{9; 5; 4; 4; 0; -2 \ldots\}$ Es NO creciente porque, $9 \geq 5 \geq 4 \geq 4 \geq 0 \geq -2 \geq \ldots$
NO decreciente	$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \ldots$ o $a_n \leq a_{n+1}\ ;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$	$\{2; 2; 5; 7; 7; 7; 8; \ldots\}$ Es NO decreciente porque, $2 \leq 2 \leq 5 \leq 7 \leq 7 \leq 7 \leq 8 \leq \ldots$

PITAGORAS ACADEMIA

SUCESIONES REALES

Convergencia y divergencia de una sucesión

Sea la sucesión (a_n) donde: $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$

Si $L \in \mathbb{R}$, la sucesión (a_n) converge a L.

Si L es $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \nexists \end{cases}$ la sucesión (a_n) es divergente.

Ejemplos

Indique si las sucesiones son convergentes o divergentes

1. $\left\{\frac{1}{n}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge a 0

2. $\left(\frac{3n+1}{4n-1}\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{4n-1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{3n+1}{4n-1}\right)$ converge a $\frac{3}{4}$

3. $(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \Rightarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge al $+\infty$.

4. $\{-n^4\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} -n^4 = -\infty \Rightarrow \{-n^4\}$ es divergente al $-\infty$.

5. $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots\right\} \Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\Rightarrow \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ converge a 0.

SUCESIONES REALES

Aplicación 1

Halle el valor de convergencia de la siguiente sucesión.

$$(x_n) = ([(n+2020)n^{-1}]^n)$$

Resolución

Para obtener el valor de convergencia de la sucesión tenemos que calcular el limite.

$$\lim_{n\to+\infty} [(n+2020)n^{-1}]^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n+2020}{n}\right]^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left[1+\frac{2020}{n}\right]^n = e^{2020}$$

$\therefore x_n$ converge al número e^{2020}

Aplicación 2

Determine el punto de convergencia de la siguiente sucesión

$$a_1 = 666, \qquad a_n = \frac{1}{2}a_{n-1};\ n \geq 2$$

Resolución

Es la **relación de recurrencia** que nos permite encontrar a los términos de la sucesión a partir de otros términos anteriores.

$n = 1 \rightarrow a_1 = 666$

$$n = 2 \rightarrow a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)666 = 666\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}$$

$$n = 3 \rightarrow a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)666 = 666\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}$$

$$n = 4 \rightarrow a_4 = \frac{1}{2}a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 666 = 666\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_n = 666\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left[666\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = 0$$

$\therefore a_n$ converge al número 0

SUCESIONES REALES

Observaciones adicionales

Existen sucesiones que no son monótonas

Ejemplos

$$(x_n) = \left((-1)^n\right) = (-1; 1; -1; 1; -1; \dots)$$

$$a_n = \begin{cases} 3^n \ ; si\ n\ es\ par \\ 3^{-n}; si\ n\ es\ impar \end{cases} = \left(\frac{1}{3}; 9; \frac{1}{27}; 81; \dots\right)$$

Existe un grupo de sucesiones llamadas **alternantes** y son aquellas que alternan los signos de sus términos.

Ejemplos

$$(x_n) = \left((-2)^n\right) = (-2; 4; -8; 16; -32; \dots)$$

$$(a_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\right)$$

Sucesiones constantes

(a_n) es constante $\leftrightarrow a_{n+1} = a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Ejemplos

$$(x_n) = (1) = (1; 1; 1; 1; \dots)$$

$$(a_n) = (-10) = (-10; -10; -10; \dots)$$

SUCESIONES REALES

Teoremas.

1) Si una sucesión es acotada y monótona entonces la sucesión es convergente.

Ejemplo

$$(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{1}; > \frac{1}{2}; > \frac{1}{3}; > \frac{1}{4}; \dots\right)$$

es monótona Y también es acotada ya que $0 < x_n < 2$

Entonces es convergente

$(converge\ a\ cero)$

Lo contrario no necesariamente se cumple.

$$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\right)$$

La sucesión es convergente pero no monótona.

2) Toda sucesión convergente es acotada

Ejemplo

$$(b_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \frac{1}{2^4}; \dots\right)$$

Notamos que $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ entonces es acotada

$$(0 < b_n < 1)$$

Lo contrario no necesariamente se cumple.

$$\left((-1)^n\right) = (-1; 1; -1; 1; \dots)$$

Es acotada $-2 < x_n < 2$, pero no converge

SUCESIONES REALES

Teoremas.

3) Sea la sucesión a_n que converge a $L \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$\lim_{x\to+\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{x\to+\infty} a_{n+2} = \cdots = L$$

Se aplica principalmente cuando se tiene la relación de recurrencia.

Aplicación

Si la sucesión convergente (a_n) está definida por la forma recursiva $a_1 = 0$ y $2a_{n+1} = a_n + 1$. Determine el punto de convergencia de la sucesión.

Resolución

Aplicando el teorema tres, tomaremos limite a la forma recurrencia.

$$2a_{n+1} = a_n + 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2a_{n+1} = \lim_{x\to+\infty} (a_n + 1)$$

$$2 \lim_{x\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{x\to+\infty} a_n + 1$$

$$2L = L + 1$$

$$L = 1$$

∴ La sucesión converge a 1

PITAGORAS ACADEMIA

SERIES NUMERICAS

SUMATORIA

Se denota con el símbolo $\sum$ (sigma) y permite representar la suma de números (sumandos).

Sea los números $a_1;\ a_2;\ a_3; \ldots;\ a_n$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Ejemplo

- $\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
- $\sum_{k=3}^{7} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 135$
- $\sum_{n=2}^{6} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{29}{20}$

PROPIEDADES

1. $\sum_{k=n}^{m} c.a_k = c \sum_{k=n}^{m} a_k$
2. $\sum_{k=n}^{m} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=n}^{m} a_k \pm \sum_{k=n}^{m} b_k$

Ejemplo

- $\sum_{k=1}^{10} 5.k = 5 \sum_{k=1}^{10} k$
- $\sum_{n=1}^{7} \left(n^2 - \frac{1}{2n}\right) = \sum_{n=1}^{7} n^2 - \sum_{n=1}^{7} \frac{1}{2n} = \sum_{n=1}^{7} n^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{7} \frac{1}{n}$

PITAGORAS ACADEMIA

SERIES NUMERICAS

Hay un grupo de sumatorias conocidas como **Sumas Notables**

1. $\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n \text{ sumandos}} = c.n$

2. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3. $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

4. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

5. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Ejemplo

- $\sum_{k=1}^{10} (5k+3) = 5\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 3$

$= \overbrace{5[1 + 2 + 3 + \cdots + 10]}^{} + \overbrace{3 + 3 + 3 + \cdots + 3}^{}$

$= 5\left(\frac{10(10+1)}{2}\right) + 3(10)$

$= 275 + 30 = 305$

- $\sum_{k=1}^{20} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2 = \frac{20(20+1)(2(20)+1)}{6}$

$= 2870$

SERIES NUMERICAS

Otras sumas importantes

1. Suma de los términos de una sucesión geométrica.

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n}_{n+1 \text{ términos}} = a\left(\frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}\right)$$

(cada $\times r$ entre términos consecutivos)

Ejemplo

- $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{20} = \left(\frac{3^{20+1} - 1}{3 - 1}\right) = \frac{3^{21} - 1}{2}$
- $5 + 5\left(\frac{1}{2}\right) + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + 5\left(\frac{1}{2}\right)^{33} = 5\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{34} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1}\right)$
- $2 + 2(3) + 2(3)^2 + \cdots + 2(3)^{20} = 2\left(\frac{3^{20+1} - 1}{3 - 1}\right) = 3^{21} - 1$

2. Propiedad telescópica.

$$\sum_{k=1}^{n} [f(k+1) - f(k)] = f(n+1) - f(1)$$

Ejemplo

- $\sum_{k=1}^{100} \left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right] = \frac{1}{101} - \frac{1}{1} = -\frac{100}{101}$
- $\sum_{k=1}^{20} [k^2 - (k+1)^2] = 1^2 - (20+1)^2$

$$= 1 - 21^2 = -440$$

PITAGORAS ACADEMIA

SERIES NUMERICAS

Sumas parciales de una sucesión

Dada la sucesión de infinitos números reales $(a_n) = (a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots)$. La sucesión de sumas parciales se define como

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Enésima suma parcial

$$\vdots$$

Una serie se forma por la suma de los infinitos términos de la sucesión $\{a_n\}$ y se denota por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ejemplo

- $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots$
- $\sum_{n=1}^{\infty} n! = 1! + 2! + 3! + 4! + \cdots$

PITAGORAS ACADEMIA

SERIES NUMERICAS

Convergencia de una serie

Se dirá que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si la sucesión de suma parciales (S_n) converge, es decir:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Ejemplos

1. Analice la siguiente serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Para saber si la serie converge, calculamos el límite a la sucesión de sumas parciales

$$S_n = \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{K=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

∴ La serie converge a 1

2. Analice la siguiente serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

Para saber si la serie converge, calculamos el límite a la sucesión de **sumas parciales**

$$S_n = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}} \qquad S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right)$$

$$\longrightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{0 - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right) = 1$$

∴ La serie converge a 1

SERIES NUMERICAS

3. Analice la siguiente serie $\sum_{n=1}^{\infty}[\log(n+1)-\log(n)]$

Para saber si la serie converge, calculamos el límite a la sucesión de **sumas parciales**

$$S_n = \log(2)-\log(1)$$
$$\log(3)-\log(2)$$
$$+\quad \log(4)-\log(3)$$
$$\vdots$$
$$\log(n+1)-\log(n)$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \log(n+1)-\log(1)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}[\log(n+1)-\log(1)] = +\infty$$

$\therefore$ La serie diverge

Series especiales

Serie armónica:

La serie armónica es de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

La serie armónica es divergente.

SERIES NUMERICAS

Serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

Propiedades:

I. Si $0 < |r| < 1$, entonces la serie geométrica converge a $\dfrac{a}{1-r}$

Es decir:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

II. Si $|r| \geq 1$, entonces la serie geométrica diverge

Ejemplos

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \underbrace{\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \cdots}_{\text{Serie geométrica} \quad r = \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} 5^n = \underbrace{5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \cdots}_{\text{Serie geométrica} \quad r = 5}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} 5^n$ la serie es divergente.

Aplicaciones:

1. Calcule el valor aproximado de:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}^3} + \frac{1}{\sqrt{2}^5} - \frac{1}{\sqrt{2}^7} + \cdots$$

Solución:

$$S = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}^3} + \frac{1}{\sqrt{2}^5} - \frac{1}{\sqrt{2}^7} + \cdots}_{\text{Serie geométrica} \quad r = -\frac{1}{\sqrt{2}^2} = -\frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

SERIES NUMERICAS

2. Calcule

$$S = \frac{7}{12} + \frac{25}{144} + \frac{91}{1728} + \frac{337}{20736} + \cdots$$

UNI 2012-1

Solución:

$$S = \frac{7}{12} + \frac{25}{144} + \frac{91}{1728} + \frac{337}{20736} + \cdots$$

$$S = \frac{3+4}{3.4} + \frac{9+16}{9.16} + \frac{27+64}{27.64} + \frac{81+256}{81.256} + \cdots$$

$$S = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{64}\right) + \left(\frac{1}{81} + \frac{1}{256}\right) + \cdots$$

$$S = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots\right)$$

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Serie -p:

La serie-p tiene la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} \cdots$$

- Si $p > 1$, la serie-p es convergente.
- Si $p \leq 1$, la serie-p es divergente.

Ejemplos

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots}_{Serie-p \qquad p=2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ es convergente}$$

PITAGORAS ACADEMIA

SERIES NUMERICAS

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots}_{Serie - p \qquad p = \frac{1}{2}}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ es divergente

Series notables

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

PROPIEDADES

Si: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergente

1. $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; ; c \in \mathbb{R}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Ejemplos

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

SERIES NUMERICAS

- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$

TEOREMA

1. Si: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

CRITERIO DE CONVERGENCIA

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie

Si: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces; la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

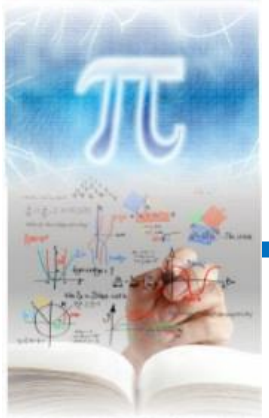
Ejemplos

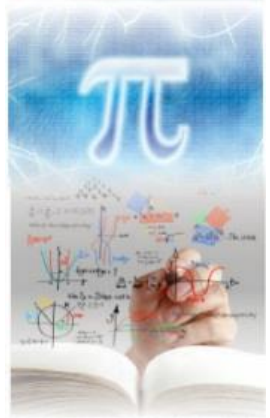
Analice la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2n-1}$

Es divergente puesto que: $a_n = \frac{3n+1}{2n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-1} \neq 0$$

MOMENTO DE PRACTICAR





PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

SUCESIONES Y SERIES

1. Con respecto a la sucesión $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{6};\frac{4}{7};\frac{5}{8};\ldots\right)$ determine la secuencia correcta del valor de verdad (V) o falsedad (F).

I. Es una sucesión creciente.
II. Es una sucesión acotada.
III. Es una sucesión periódica.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) FVF E) FFF

SOLUCION Analizando:

$I.\ \frac{2}{5}<\frac{3}{6}<\frac{4}{7}<\frac{5}{8}\ldots\ldots\rightarrow a_n < a_{n+1}$

Luego la sucesion es creciente

II. El término general es: $a_n=\frac{n+1}{n+4}$

$n\geq 1\rightarrow n+4\geq 5\rightarrow 0<\frac{1}{n+4}\leq\frac{1}{5}$

$0>\frac{-3}{n+4}\geq-\frac{3}{5}\rightarrow 1>\frac{n+1}{n+4}\geq\frac{2}{5}$

$\rightarrow\frac{2}{5}\leq a_n<1\rightarrow a_n\ es\ acotada$

III. La sucesión no es periódica por que: $a_{n+k}\neq a_n\ \forall\ n\ \in N$

$\therefore$ VVF

2. Dadas las sucesiones
$(\text{sen}n)_{n\geq 1}$ y $\left((-1)^n\right)_{n\geq 1}$
indique el valor de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda.

I. Son sucesiones periódicas.
II. Son sucesiones acotadas.
III. Son sucesiones monótonas.

A) VVV B) VVF C) FVV
D) VFV E) FVF

SOLUCION

I) {Sen1; Sen2; …..Sen30;…..Sen150;…..Sen179……}

iguales

Son iguales

{-1; 1 ; -1; 1; -1; 1; ……}

Ambas son periódicas

II) $-1\leq \text{Sen}(n)\leq 1$

$-1\leq (-1)^n\leq 1$

Ambas son acotadas

III) Ninguna es monótona

VVF

3. Se tiene la siguiente sucesión, determine su valor de convergencia.

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{3n}{n+2} & ; \text{ si } n = \text{par} \\ \dfrac{\sqrt{9n^2+1}}{n+1} & ; \text{ si } n = \text{impar} \end{cases}$$

A) 4 B) 5 C) 3
D) 2 E) 0

SOLUCION

Tomando limites a los terminos generales

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+2} = 3$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} = 3$$

$\therefore$ *la sucesión converge a* 3

4. Determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda, con respecto a la sucesión

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2n+1} & ; \text{ si } n = \text{par} \\ \dfrac{n^2+1}{(n+3)(n+2)} & ; \text{ si } n = \text{impar} \end{cases}$$

I. Presenta dos puntos límites. ✓
II. Es acotada. ✓
III. Es convergente. ✗

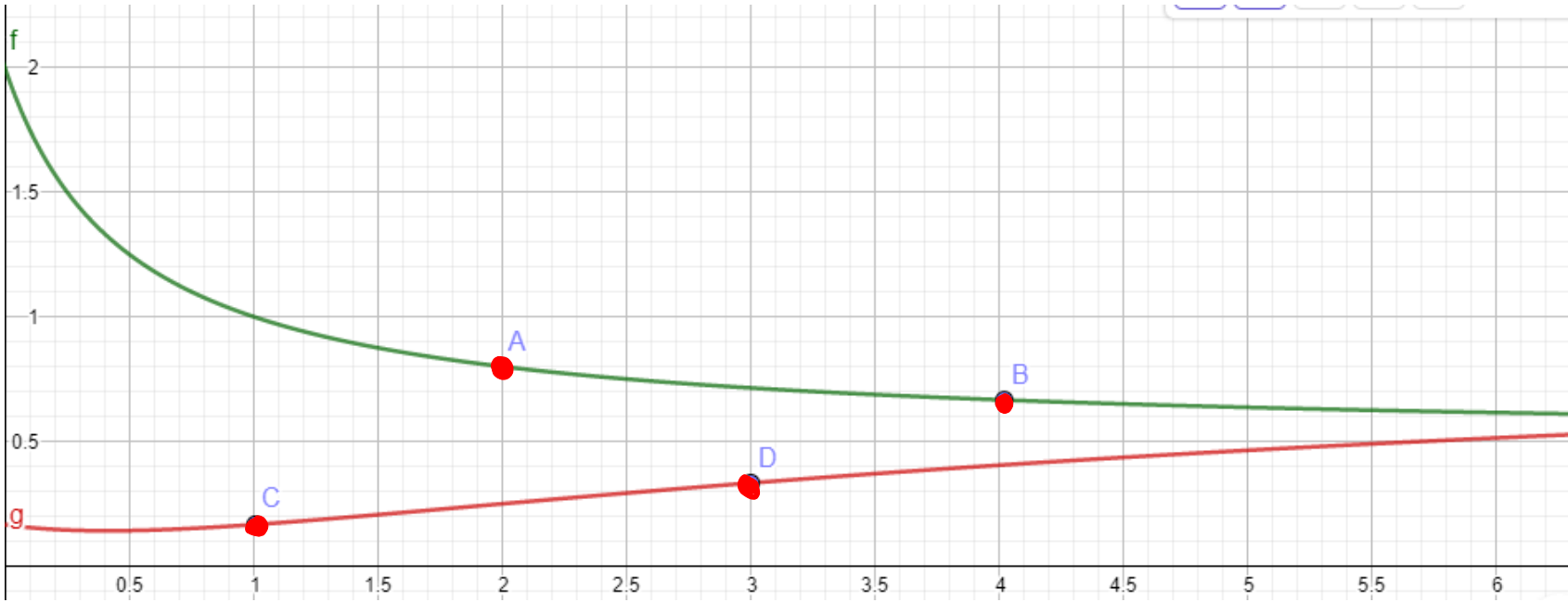
A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFF E) FFV

SOLUCION Tomando limites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+5n+6} = 1$$

I) V II) V III) F



SUCESIONES Y SERIES

5. Determine el valor de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

I. Toda sucesión acotada es convergente.
II. Toda sucesión convergente es monótona.
III. Toda sucesión convergente es acotada.

A) VVV B) VFV C) VVF
D) FVV E) FFV

SUCESIONES Y SERIES

6. Si se sabe que $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión convergente tal que

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 6}{a_n + 2}$$

Determine el valor de convergencia si se sabe que todos sus términos son positivos.

A) 3 B) 1 C) 2
D) 2,5 E) 3,5

SUCESIONES Y SERIES

7. Se tiene la sucesión (x_n) definida por

$x_1 = \sqrt{2}; x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

Determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda.

I. Es monótona.
II. Es acotada.
III. Es convergente a 2.

A) VVV B) VVF C) FVF
D) FFF E) VFF

8. Calcule el valor de convergencia de $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ si

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3+n+1}+\sqrt{4n^2+n+3}}{\sqrt[5]{n^5+\operatorname{sen} n}}$$

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{3}$

D) 2 E) 3

SUCESIONES Y SERIES

9. Se deja caer una pelota desde una altura de un metro, luego rebota hasta la mitad de un metro, y en el siguiente rebote alcanza la mitad de altura que se logró en el rebote anterior y así sucesivamente. Si este proceso idealmente continua indefinidamente, determine la distancia total que recorre la pelota.

A) 2 m B) 1 m C) 3 m
D) 4 m E) 2,5 m

SUCESIONES Y SERIES

10. Calcule el valor de

$$S = 3 - \frac{3}{5} + \frac{3}{5^2} - \frac{3}{5^3} + \ldots$$

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{1}{3}$ E) 2

SUCESIONES Y SERIES

11. Determine el valor de convergencia en A.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \cdots$$

A) $\frac{3}{2}$ B) 7 C) 2

D) 5 E) 3

SUCESIONES Y SERIES

12. Calcule el valor de convergencia de

$$M = \frac{5}{6} + \frac{13}{6^2} + \frac{35}{6^3} + \frac{97}{6^4} + \ldots$$

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{2}$

D) 3 E) 2

13. Determine la secuencia correcta del valor de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda.

I. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, entonces (a_n) converge.

II. $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$

III. $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n}$ converge.

A) FFF B) VVV C) FFV
D) FVF E) VVF

SUCESIONES Y SERIES

14. Calcule el valor de convergencia de

$$N = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

$$M = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \frac{1}{130} + \ldots$$

A) 1; 1 B) 1; $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$

D) 1; $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$

SUCESIONES Y SERIES

15. Si se tiene que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = L$$

entonces calcule el valor de

$1+L+L^2+L^3+L^4+L^5$

A) 6 B) 31 C) 63
D) 80 E) 1

16. Determine el valor de convergencia

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n+1}\right)-n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

A) 1 B) $1-\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{1}{2}$

D) $1-\operatorname{sen}1$ E) $1-\operatorname{sen}\frac{1}{2}$

PITAGORAS
ACADEMIA

SUCESIONES Y SERIES

PITAGORAS
ACADEMIA

SUCESIONES Y SERIES

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS